Conventions : $\Gamma = \{p, q, r, \ldots\}$ est un ensemble fini de variables propositionnelles ou atomes.
$A, Q_1, \ldots Q_n$ sont des formules (aussi appelées axiomes).
$\Omega = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ est un ensemble de formules.
connecteurs : $\neg$ (negation), $\vee$ (disjonction), $\wedge$ (conjonction), $\rightarrow$ (implication) et $\leftrightarrow$ (équivalence).
quantificateurs : $\forall x$ *(pour tout, quel que soit)*, $\exists x$ *(il existe)*.

Logique propositionnelle [Ch. 1]

Une interprétation I d'une formule est une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles Γ dans $\{0, 1\}$ (table de vérité).

Un **modèle** d'une formule A est une interprétation I telle que $I(A) = 1$ (c-à-d. la table de vérité contient au moins une ligne de A vallant 1).

A est **satisfiable** si il existe au moins un modèle de A. Sinon A est dite **insatisfiable**. A est une **tautologie** si pour tout I de A on a $I(A) = 1$. *Note :* $I(A) = I(B) \Rightarrow A \equiv B$ (c.f. table de vérité).

On a un **modèle** d'un ensemble de formules Ω si chaque formule de Ω est vraie. On écrit $I(\Omega) = 1$. *Note :* Ω est satisfiable si et seulement si $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$ est satisfiable.

$\Omega \models A$ (A est une **conséquence logique** de Ω) si pour tout $I(Q_1) = I(Q_2) = \ldots = I(Q_n)$ on a $I(A) = 1$ *(les lignes de la table de vérité ou on a un* 1 *pour tout* Ω *on a aussi* 1 *pour* A*).* **Note :** $\Omega \models A$ si et seulement si $\Omega \cup \{\neg A\}$ est insatisfiable.

Système de preuve [Ch. 2]

Déf. : Un **littéral** est ou bien une formule atomique ou bien sa négation.
Une **clause** est une formule de la forme $\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \ldots \vee \Phi_n$ où chaque Φ_i est un littéral.
Une formule en **forme normale conjonctive (FNC)** est de la forme $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ où chaque C_i est une clause.
Une **conjonction élémentaire** est une formule de la forme $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n$ où chaque Φ_i est un littéral.
Une formule en **forme normale disjonctive (FND)** est de la forme $E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n$ où chaque Φ_i est une conjonction élémentaire.
La clause ne contenant aucun littéral (**clause vide**) est notée $\square$, elle est insatisfiable par convention.

Note : Un littéral est une clause ; les clauses ainsi que les conjonctions élémentaires sont sous forme FNC et FND.

Toute formule de logique propositionnelle est équivalente à une FNC et une FND. Pour les obtenir, on utilise les transformations suivantes :

$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
$(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$(\neg (P \vee Q)) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$ *(De Morgan)*
$(\neg (P \wedge Q)) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$ *(De Morgan)*

$P \equiv \neg\neg P$ *(loi de la double négation)*
$(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ *(distributivité de* $\wedge$*)*
$(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ *(distributivité de* $\vee$*)*

Marche à suivre : - si on a la **formule**, la développer avec les régles ci-dessus pour obtenir la forme FND. Distribuer ensuite le $\vee$ pour obtenir la FNC.
- si on connaît la **table de vérité** de la formule A, on a la forme FND avec les lignes de la table où A est satisfiable. Pour obtenir la forme FNC, on prend $\neg A$, et on distribue la négation avec *De Morgan*.

Procédure de Davis-Putnam

L'algorithme de Davis-Putnam permet de déterminer si un ensemble de clauses à un modèle ou pas. Il faut appliquer les étapes suivantes sur un ensemble de clauses E :
1) Si E est **vide**, retourner satisfiable ;
2) Si E contient la **clause vide**, retourner insatisfiable ;
3) Eliminer les **tautologies** ainsi que les **clauses isolées** de E puis retourner à 1). Une clause est isolée si elle contient un littéral isolé (si L est isolé, alors aucune clause de E ne contient de $\neg L$; supprimer la clause revient à fixer L=1) ;
4) Eliminer les **clauses contenant strictement une autre clause** de E puis retourner à 1). ($(X \vee Y \vee \neg Z)$ est contenu dans $(X \vee Y)$)
5) Si E contient un **clause unitaire** A, alors remplacer E par $E[A := 1]$ puis retourner à 1) (on supprime toutes les clauses contenant A et on enlève $\neg A$ de toute les autres clauses).
6) Choisir une variable propositionnelle A de E. Appliquer les étapes 1) à 5) sur $E[A := 1]$ et $E[A := 0]$. retourner satisfiable si l'un des résultats est satisfiable, retourner insatisfiable sinon.

Note : On peut améliorer la dernière étape en effectuant la séparation sur une variable ayant le plus d'influence sur l'ensemble E.

Important : $\neg P \equiv \neg P \vee \square$, donc $\{P, \neg P\}$ est insatisfiable.

Clause de Horn : une clause est dite de Horn si elle comporte au plus une variable propositionnelle positive. ($\{P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ est une clause de Horn).

Déduction naturelle

Règles Rep, Rep-g : *Il est autorisé de répéter n'importe où dans la déduction une proposition qui précède.*

Elim. de $\rightarrow$ *(Modus Ponens)*

k	$P \rightarrow Q$	
l	P	
	$\dots$	
	Q	k, l, $\rightarrow$e

On peut facilement démontrer que $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$ *(Modus Tollens).*

Intro. de $\rightarrow$

k	P (hypothèse)	
	$\dots$	
l	Q	
	$P \rightarrow Q$	k, l, $\rightarrow$i

Elim. de $\wedge$

k	$P \wedge Q$	
	P	k, $\wedge$e

Note : *idem pour Q.*

Intro. de $\wedge$

k	P	
	$\dots$	
l	Q	
	$P \wedge Q$	k,l, $\wedge$i

Intro. de $\vee$

k	P	
	$P \vee Q$	k, $\vee$i

Note : *idem pour Q.*

Elim. de $\vee$

k	$P \vee Q$	
l	P (hypothèse)	
	$\dots$	
m	M	
n	Q (hypothèse)	
	$\dots$	
o	M	
	M	k, l-m, n-o, $\vee$e

Règle de l'équivalence
P $\leftrightarrow$ Q $=_{def}$ (P $\rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\rightarrow$ P)

Intro de $\neg$ *(démo. par l'absurde)*

k	P (hypothèse)	
	$\dots$	
l	Q	
m	$\neg Q$	
	$\neg P$	k, l, m, $\neg$ i

Elim. de $\neg$

k	P	
	$\dots$	
l	$\neg P$	
	Q	k, l, $\neg$e

Intro de $\neg\neg$

k	P	
	$\dots$	
	$\neg\neg P$	k, $\neg\neg$i

Note : *facilement démontrable avec hypothèse $\neg P$ puis contradiction.*

Elim. de $\neg\neg$

k	$\neg\neg P$	
	$\dots$	
	P	k, $\neg\neg$e

Remarque : *Système des régles de la déduction naturelle complet si et seulement si* $\phi 1, \phi 2, \dots \phi n \vdash \psi$.

Logique du 1er ordre [Ch. 3]

l'alphabet d'un langage du premier ordre comporte les **symboles** suivants : *connecteurs*, *parenthèses*, *quantificateurs* ($\forall x$ *[pour tout, quel que soit]* ou $\exists x$ *[il existe]*) et un *ensemble de variables* (x, y, ...).

Un langage $\mathscr{L}$ de la logique du premier ordre est caractérisé par ses *prédicats* (ou relation, donnant un résultat booléen), ses *fonctions* et ses *constantes*.

L'arité d'un prédicat ou d'une fonction est le nombre d'arguments possibles (*unaire*, *binaire*, *n-aire*).

Un **terme** du langage est une expression que l'on peux former avec les constantes, variables et fonctions d'un langage.
Si $t_1, \dots t_n$ sont des termes et P un prédicat, alors $P(t_1, \dots, t_n)$ est une **formule atomique**.

Une **formule** est composée de *formules atomiques* seules ou reliées entre elles par des *connecteurs*.

L'occurence d'une variable x est **liée** si elle se trouve dans le champ d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$, sinon elle est **libre**.

Une **occurence** est une position de cette variable dans la formule, sans compter celle dans les quantificateurs.

Une **variable est libre** si elle à **au moins** une occurence libre.

Une formule dont toute les variables sont liées est dite **fermée** ou **close**.